

## Turbulenz - Beschreiben mittels repräsentativer Wirbelsysteme

VON WERNER ALBRING

Technische Universität Dresden, DDR

*Herrn Professor Rompe zum 80. Geburtstag gewidmet*

**Inhaltsübersicht.** Sowohl im natürlichen Ablauf, als auch bei technischen Anwendungen ist die turbulente Fließform häufig zu beobachten. Gerade wegen der außerordentlichen Wichtigkeit beim Optimieren von Strömungsprozessen, aber auch zum Durchdringen meteorologischer Probleme wünscht man Einzelheiten der turbulenten Bewegung kennenzulernen und möchte sich nicht nur mit statistischen Mittelwerten begnügen. Deshalb ist seit den sechziger Jahren der turbulente Elementarprozeß ein Forschungsthema an der Dresdner Technischen Universität geblieben. Anfänglich untersuchte man das turbulente Wirbeln in einem gradientenfreien Hauptstrom. Rayleighs Differentialgleichung konnte integriert werden. Im Resultat zeigte sich, daß unter Wirken der nichtlinearen Summanden ein ganzes Spektrum zusätzlicher Wirbel entstanden war. Durch Auswerten vieler Messungen konnten solche „Kombinations-Wirbelfelder“ nachgewiesen werden. Parallel hierzu wurde ein Mischungsalgorithmus ausgearbeitet, der sich eignet, auch gekoppelt Prozesse zeitlich zu verfolgen. Ferner ist es möglich geworden, für ein vorgegebenes Wirbelsystem den Koeffizienten der zeitlichen Dämpfung zu bestimmen, und auch die zeitliche Änderung eines Spektrums zu berechnen.

### Turbulence — Described by Representative Vortex Systems

**Abstract.** The turbulent form of flow is very often observed, in nature and with technical processes. Optimising technical flows, but also investigating meteorological problems requires knowledge about details of turbulent motion beyond statistical data. Due to its extraordinary importance, the turbulent elementary process has been subject to research in the field of fluid mechanics in Dresden since the 1960s. At first the gradient free flow has been investigated. The Rayleigh differential equation was integrated. As a result of the nonlinear effects of turbulent fluctuations a spectrum of vortex fields was provided. The occurrence of these "combination vortex fields" could be confirmed by numerous measurements. The described mixing algorithm is suitable for the coverage of coupling processes. It is possible to compute for given vortex systems the timal damping coefficient of the whole system and to calculate the intensity-spectrum as a function of time.

### 1. Einleitung

Man versteht unter Turbulenz stark verwirbelte fluide Strömungen, bei denen viel mehr mechanische Energie verbraucht und in Wärme übergeführt wird, als es bei geschichtetem (laminarem) Fließen der Fall ist. Bei Turbulenz wächst der Strömungswiderstand von Körpern gegenüber der Laminarität. Turbulente Wirbel intensivieren das Mischen von Impuls, Wärme und von Massen. Während das Beschreiben laminarer Strömungen durch Integrale der strömungsmechanischen Differentialgleichungen in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts gelang und perfektioniert wurde, bemühten sich die

Strömungsmechaniker lange Zeit vergeblich, entsprechende Lösungen für die Turbulenz aufzufinden. Unter dem Zwang, für technische Anwendungen bequem auswertbare Informationen zu bieten, hatten die Strömungsmechaniker im ersten Viertel unseres Jahrhunderts begonnen, Meßergebnisse (z. B. über den Druckabfall in Rohren, über den Widerstand von Körpern, über die Geschwindigkeitsabhängigkeit vom Wege) ähnlichkeitsmechanisch zu ordnen. Ergänzt wurden diese Bemühungen seit dem zweiten Viertel unseres Jahrhunderts, und sich bis in die Gegenwart hinziehend, durch statistisches Auswerten turbulenter Bewegungen. Das geschah schon mit der Absicht, im Ergründen des Turbulenzphänomens weiter vorzudringen. Doch mußte man einsehen, daß beide Methoden, die Ähnlichkeitsmechanik sowohl als auch die empirische Statistik, nur den Anspruch sinnvollen Ordners erfüllen können, doch wegen der innewohnenden Mittelungen dringt der Blick nicht tief in die mechanischen Zusammenhänge eines Elementarablaufes, und das Kausalzusammenhängen bleibt unverstanden.

Die Dresdner Strömungsmechaniker haben sich in den beiden letzten Jahrzehnten damit beschäftigt, turbulente Elementarströmungen mit Hilfe repräsentativer Wirbelsysteme zu beschreiben als Integrale der strömungsmechanischen Differentialgleichungen [1].

## 2. Die benutzten Grundgleichungen

Die unter (1.1) auf Tafel 1 geschriebene Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik gilt streng genommen für ein von L. EULER idealisiertes Fluid ohne eine molekulare Substruktur. Die Gleichung bleibt aber immer dann eine sehr gute Näherung, wenn die Abmessungen des Strömungsgebietes, z. B. die Dicke einer Grenzschicht, sehr groß gegenüber den Molekularabständen ist. Als Integral der Gleichung (1.1) wird eine Stromfunktion  $\psi$  entsprechend (1.2) eingeführt. Sie steht zur Geschwindigkeit  $c$  des Makrostromes in dem unter (1.3) geschriebenen Zusammenhang. Die Dichte  $\rho$  soll nachfolgend als unveränderlich angesehen werden. Dann erfüllt (1.3) stets die Differentialgleichung (1.1). Unter (1.4) steht der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Stromfunktion für ebene Strömungen geschrieben. Dabei bleibt nur eine Komponente der vektoriiellen Stromfunktion erhalten, nämlich  $\psi = \psi_z$ . Außer der Kontinuitätsbeziehung braucht man eine Differentialgleichung, die das dynamische Gleichgewicht im Sinne von Newtons Theorem beschreibt. Es war EULER gewesen, der im Jahre 1752 erstmalig dieses Theorem als eine Differentialgleichung schrieb. Seine Differentialgleichung umfaßt in unserer heutigen Schreibweise die ersten vier Summanden von (1.5), sie gelten für EULERS idealisiertes Fluid ohne Wirken von Kräften zwischen den Molekülen. Im Euler-Fluid bleiben einmal benachbarte kleinste Teilchen auch später stets zusammen. Im Euler-Fluid existiert keinerlei Austausch von Impuls, Wärme und Masse, also auch keine Reibung, kein Wärmeübergang und keine Diffusion. Die Reibung berücksichtigte später NAVIER (1822) durch einen Zusatzsummanden in (1.5). Mit jeder Änderung des Geschwindigkeitsgradienten im Makrostrom werden allen benachbarten Molekülen unterschiedliche Zusatzgeschwindigkeiten aufgezwungen. Benachbarte Moleküle üben Zentralkräfte aufeinander aus, die sich mit dem gegenseitigen Abstand ändern. Der Faktor  $\nu$  in (1.5), kinematische Zähigkeit genannt, berücksichtigt im Mittel die Kraftwirkung aller Moleküle auf das Elementarvolumen; der Faktor wird durch Messung bestimmt, z. B. durch das Feststellen des Druckabfalles eines durch enge Rohre gepreßten fluiden Stromes. NAVIER, sowie spätere Bearbeiter, die auf anderen Wegen zum gleichen Resultat kamen, berücksichtigten nur intermolekulare Kräfte, aber keine Momente. STOKES (1845) hatte in seiner Deduktion die am infinitesimalen fluiden Element angreifenden Momente sogleich Null gesetzt. J. C. MAXWELL bedachte zwar, daß auch Momentenspannungen auftreten könnten, hielt aber deren Wirkung für vernachlässigbar klein.

## Tafel 1

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \operatorname{div} \varrho \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (1.1)$$

$\mathbf{c}$  — Geschwindigkeit des Makrostromes

$\varrho$  — Dichte des Fluids

Stromfunktion  $\psi$ 

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} \cdot \psi_x + \mathbf{j} \cdot \psi_y + \mathbf{k} \cdot \psi_z \quad (1.2)$$

$$\mathbf{c} = \operatorname{rot} \psi \quad (1.3)$$

Ebene Strömung:  $\mathbf{i} \cdot \psi_x = 0; \mathbf{j} \cdot \psi_y = 0; \mathbf{k} \cdot \psi_z \rightarrow \psi$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{c}_y = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.4)$$

## Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{c}^2 - \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{c} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{c} = 0 \quad (1.5)$$

= 0, Gleichung von Euler für strenges  
Kontinuum

Reibungskraft  
pro Masseneinheit

$t$  — Zeit;  $p$  — Druck;  $\nu$  — kinematische Zähigkeit.

## Rotation der Geschwindigkeit bei ebener Strömung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{c} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = -\Delta \psi \quad (1.6)$$

## Rayleigh-Gleichung für ebene Strömung:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} \Delta \psi - \nu \Delta \Delta \psi = 0 \quad (1.7)$$

## Divergenz der Navier-Stokes Gleichung:

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} p = -\Delta p = \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t} \mathbf{c} - \frac{\varrho}{2} \operatorname{grad} \mathbf{c}^2 + \varrho \cdot \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{c} \right\} \quad (1.8)$$

Nun noch einmal zurück zur Gleichung (1.4). Man nennt Linien, auf denen die Stromfunktion  $\psi$  unverändert bleibt, Stromlinien. Die Richtung der Stromlinie stimmt jederzeit mit der Fließrichtung des Makrostromes überein, die Geschwindigkeitskomponente des Makrostromes senkrecht zur Stromlinie bleibt Null. Nicht aber die Geschwindigkeit des Mikrostromes innerhalb der molekularen Substruktur. Moleküle wechseln über die Stromlinien, doch bleiben im zeitlichen Mittel Molekularströme in beiden Richtungen, die die Stromlinien queren, gleich groß. Die Funktion  $\operatorname{rot} \mathbf{c}$ , die in (1.5) erscheint, läßt sich mittels (1.3) und (1.4) durch die Laplace Ableitung der Stromfunktion ausdrücken (1.6). In (1.5) wird das Druckglied  $1/\varrho \cdot \operatorname{grad} p$  verschwinden, wenn man die Rotation der ganzen Gleichung bildet. Hierbei verwendet man (1.6) und erhält (1.7), das ist eine Differentialgleichung, die nach RAYLEIGH benannt wird. J. W. ST. RAYLEIGH hatte diese Gleichung 1883 erstmalig aufgeschrieben, er brauchte sie, um durch ein Integral nachzuweisen, daß die Kundt'schen Staubfiguren in Glasröhren durch Luftwirbel verursacht sind. Die Gleichung (1.7) erhält mit der Stromfunktion  $\psi$  nur eine

unbekannte Variable. Die Divergenz der Navier-Stokes Gleichung ist unter (1.8) aufgeschrieben. Die Laplace-Ableitung des Druckes erscheint als Störglied in der akustischen Differentialgleichung [4].

### Wirbelfelder als Integrale der Rayleigh-Gleichung

Mit dem Ansatz (2.1) auf Tafel 2 beschreibt man Wirbelfelder, die zusammen mit einem homogenen Strom der Geschwindigkeit  $c_\infty$  fortschwimmen. Die Koeffizienten  $a_n$  sollen als komplexe Größen gelten (2.2). Die in (1.7) benötigte Laplace-Ableitung der Stromfunktion berechnet man entsprechend (2.3). Der Ansatz (2.1) stellt ein Integral der Rayleigh-Gleichung (1.7), dar, wenn die Koeffizientenbedingung (2.4) eingehalten wird.

Tafel 2

$$\psi_{\text{ges}} = \underbrace{c_\infty \cdot y}_{\text{Hauptstrom}} + \underbrace{k \cdot \exp(a_1 x + a_2 y + a_3 t)}_{\text{Wirbelfeld}} \quad (2.1)$$

$\psi_\infty$                        $\psi$

$k$  — Intensitätsfaktor, proportional zur Wirbelgeschwindigkeit

$$a_n = a_{nR} + i \cdot a_{ni} \quad (2.2)$$

$$n = 1, 2, 3$$

$$\Delta \psi = \underbrace{(a_1^2 + a_2^2)}_{\kappa^2} \psi = \kappa^2 \psi = -\text{rot } \mathbf{c} \quad (2.3)$$

$$a_3 + a_1 \cdot c_\infty = \nu(a_1^2 + a_2^2) \quad (2.4)$$

### Spezialfall

$$\psi = k \cdot \exp(a_{3R} \cdot t) \cos(a_{1i} x + a_{3i} t) \cos(a_{2i} y) \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{3R} &= -\nu(a_{1i}^2 + a_{2i}^2) \\ a_{3i} + a_{1i} \cdot c_\infty &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\lambda_1 = 2\pi/a_{1i}; \quad \lambda_2 = 2\pi/a_{2i} \quad (2.7)$$

$$\exp(a_{3R} \cdot t) = \exp\left(-\nu \cdot 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \cdot t\right) \quad (2.8)$$

Halbwertzeit für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$t_{1/2} = \frac{\lambda^2 \cdot \ln 2}{8\pi^2 \cdot \nu} \quad (2.9)$$

Die Überlagerung zweier Felder des Typs (2.1) mit  $a_{1R} = a_{2R} = 0$ , die sich aber durch das Vorzeichen von  $a_{2i}$  unterscheiden sollen, ergibt (2.5). Das Stromlinienbild über die ganze Strömungsebene wird geprägt durch die ein rechteckiges Maschenmuster bildenden Stromlinien für  $\psi = 0$ . Innerhalb jeder Masche dieses Netzes liegen geschlossene, den Mittelpunkt umschließende Stromlinien. Die Umlaufrichtung des Fluids alteriert von Masche zu Masche. Die Maschenlängen in  $x$ - und  $y$ -Richtung  $\lambda_1/2$  und  $\lambda_2/2$  stehen zu  $a_{1i}$  und  $a_{2i}$  in der Beziehung (2.7). Aus (2.4) folgen durch Trennen von Real- und Imaginärteil die Gleichungen (2.6). Es bedeutet  $a_{3R}$  in (2.5) den Koeffizienten von  $t$

in der Exponentialfunktion, der die Abnahme der aus der Stromfunktion entsprechend (1.4) bestimmbaren Geschwindigkeitskomponenten im Laufe der Zeit festlegt. Aus (2.8) läßt sich erkennen, daß das Erlöschen von Wirbeln schnell abläuft, bei großer Zähigkeit  $\nu$  oder bei kleiner Abmessung  $\lambda_{1,2}$  zwischen den Maschen  $\psi = 0$ . Bemerkenswert bleibt, daß sowohl beim Einsetzen von (2.1) als auch von (2.5) in die Rayleigh-Gleichung (1.7) deren nichtlinearer Summand Null wird. Das ist immer dann der Fall, wenn Proportionalität zwischen  $\psi$  und  $\Delta\psi$  besteht. Die Proportionalität bleibt sogar erhalten beim Überlagern beliebig vieler Wirbelfelder des Typs (2.5) mit unterschiedlichen Koeffizienten aber gleich großem  $\kappa^2$  für jedes der Felder. Felder mit  $\kappa^2 = \text{konst.}$  nennt man laminare Wirbelfelder.

Nach (2.9) berechnet würde für  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  cm die Halbwertzeit in Luft  $5,8 \cdot 10^{-2}$  Sekunden betragen, die eines Feldes mit den großen Maschen  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$  Meter aber 16,2 Stunden! Die für das Wirbelfeld mit großen Maschen errechnete Halbwertzeit scheint gegenüber aller Erfahrung viel zu lang. Denn tatsächlich fließen derartig große Wirbel nicht mehr laminar, sondern turbulent. Außer dem Großwirbel schwimmen im Felde noch viele Wirbel kleinerer Abmessung, die schneller abklingen und dem Großwirbel Energie entziehen.

Im allgemeinen Fall wird der Faktor  $\kappa^2$  in (2.3) bei dem ganzen System für jeden der überlagerten Wirbel verschieden groß sein. Dann aber bleibt der nichtlineare Summand in (1.7) erhalten, und das Wirbelsystem zeigt turbulente Eigenschaften.

Um das in einem elementaren Beispiel nachzuweisen, überlagern wir zwei Wirbelfelder mit den Stromfunktionen  $\psi_s$  und  $\psi_t$  entsprechend (3.1) auf Tafel 3. Die Wirbelfelder unterscheiden sich durch ihre Faktoren  $k_s$  und  $k_t$  sowie durch die Koeffizienten  $a_n$ , es soll  $\kappa_s^2 \neq \kappa_t^2$  gelten. (Vgl. Definition (2.3)). Dann besteht zwischen Drehung, Laplace-Ableitung, sowie Stromfunktion der Zusammenhang (3.4), also keine Proportionalität mehr wie in (2.3). Diese würde nur bei gleichgroßem  $\kappa^2$  gelten. Im nichtlinearen Summanden von (1.7) erscheint dann das Produkt  $\psi_s \cdot \psi_t$  entsprechend (3.5) als eine Störgröße gegenüber dem Laminarfließen. Im Produkt (3.5) ist mit  $(\varepsilon_s + \varepsilon_t)$  die Dämpfung gegenüber den Anfangsfeldern verstärkt. Außerdem erscheinen zusätzlich Wirbelfelder mit den Argumenten  $(\beta_s - \beta_t)$ , ein längerwelliges Feld und  $(\beta_s + \beta_t)$  ein kürzerwelliges Feld. Zum Kompensieren der (3.5) proportionalen Störung müssen dem Integral beim sukzessiven Lösungsprozeß in folgenden Überlagerungsstufen Zusatzfelder beigelegt werden, deren lineare Summanden in (1.7) eingesetzt, gerade die Anfangsstörung beseitigen. Aber die Zusatzfelder provozieren im allgemeinen Fall neue Störungen. Weil die Zusatzfelder nicht nur auf die Anfangsfelder, sondern auch gegenseitig aufeinander wirken, treten mit neuen nichtlinearen Summanden neue Störungen auf, die in weiteren Überlagerungsstufen durch neue Zusatzfelder kompensiert werden. Wegen der als klein angesetzten Faktoren  $k_s$  und  $k_t$  nehmen deren Produkte in den Zusatzfeldern immer mehr ab. Die Konvergenzbedingung für die Lösung ist bekannt [1]. Wegen der Analogie zu den Kombinationstönen der Akustik nennt man die durch den nichtlinearen Summanden von (1.7) hervorgerufenen zusätzlichen Wirbelfelder Kombinationswirbelfelder.

Tafel 3

$$\psi_{s,t} = (k \cdot \exp \varepsilon \cdot \cos \beta)_{s,t} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon = a_{1R} \cdot x + a_{2R} \cdot y + a_{3R} \cdot t \quad (3.2)$$

$$\beta = a_{1i} \cdot x + a_{2i} \cdot y + a_{3i} \cdot t \quad (3.3)$$

$$-\text{rot } \mathbf{c} = \Delta\psi = \kappa_s^2 \cdot \psi_s + \kappa_t^2 \cdot \psi_t \quad (3.4)$$

$$\psi_s \cdot \psi_t = k_s \cdot k_t \cdot \exp (\varepsilon_s + \varepsilon_t) \cdot \{ \cos (\beta_s - \beta_t) + \cos (\beta_s + \beta_t) \} \quad (3.5)$$

## Über die fluide Zähigkeit

Zum Berechnen der inneren Reibung eines Fluids setzt man voraus, daß beim Verschieben elementar kleiner Massen relativ zueinander Kräfte überwunden werden müssen. Solche Massen sind die Moleküle bei Laminarbewegung, bei Turbulenz aber größere Gebiete, sog. Wirbelballen. Solche Kräfte sind als intermolekulare Zentralkräfte bekannt, die auch als Kohäsionskraft größerer Wirbelgebiete wirken. Zum rechnerischen Ansatz denke man sich einen Elementarraum mit durchlässigen Wänden im Fluid markiert und zwar einen Würfel mit der Kantenlänge  $\Delta s$ . Man braucht weiterhin eine Aussage über den wahrscheinlichen Impulsaustausch senkrecht zu den Würfelflächen. Impuls bedeutet das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, das in unserem Falle durch die Fläche  $(\Delta s)^2$  dividiert wird, (4.1) auf Tafel 4. Man setzt voraus, daß bei Laminarität und bei freier isotroper Turbulenz der Impulsaustausch über jede der sechs Seitenflächen im statistischen Mittel gleich groß sein wird. Die Wahrscheinlichkeit des Platzwechsels über eine Seite nennt man  $W_P$ , und mit  $W_V$  benennt man die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teil der Masse innerhalb des Kontrollraumes bleibt. Dann gilt (4.3), die Summe aller Wahrscheinlichkeiten des Platzwechsels ergibt die Gewißheit 1. Die fluide Mischgeschwindigkeit, die das Platzwechsels bewirkt, ist unabhängig von der Größe des Kon-

Tafel 4

Impuls pro Flächeneinheit:

$$\underbrace{(\rho \cdot \Delta s^3)}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{\text{Geschwindigkeit}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\Delta s)^2}}_{\text{1/Fläche}} \quad (4.1)$$

$$= \rho \cdot \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{\text{Mischgeschwindigkeit } c_M} \cdot \underbrace{\Delta s}_{\text{Linearabmessung}} \quad (4.2)$$

$$6 \cdot W_P + 1 \cdot W_V = 1 \quad (4.3)$$

$$\eta_W = \underbrace{W_P \cdot \rho \cdot c_M \cdot \Delta s}_{\text{fluide Zähigkeit}} \quad (4.4)$$

$$v = \eta / \rho$$

$$\frac{v_W}{v} = W_{P1} \cdot \underbrace{\frac{c_1 \cdot \Delta s_1}{v}}_{\text{Reynoldszahl Re}} \quad (4.5)$$

$$W_{P1} = 1 / \text{Re}_{\min} \quad (4.6)$$

$$\boxed{\frac{v_W}{v} = \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\min}}} \quad (4.7)$$

$$\text{für Wirbelfelder } \text{Re} = \frac{c \cdot \lambda}{v} = \frac{c \cdot 2\pi}{v \cdot a_{1i}} \quad (4.8)$$

$$\frac{v_W}{v} = \frac{2\pi}{v \cdot \text{Re}_{\min}} \cdot \frac{c}{a_{1i}} \quad (4.9)$$

trollraumes. Bei einer speziellen Kantenlänge  $\Delta s$  wird gerade  $W_P = W_V = 1/7$  gelten (vgl. (4.3)). Mit größer werdendem Kontrollraum  $\Delta s_1 > \Delta s$  sinkt die Platzwechselwahrscheinlichkeit unter  $1/7$ . Den mit der Platzwechselwahrscheinlichkeit multiplizierten Impuls pro Flächeneinheit (4.4) nennt man die Zähigkeit eines Fluids. Da wir die Zähigkeit für turbulentes Wirbeln feststellen wollen, haben wir das für Zähigkeit übliche Symbol  $\eta$  mit dem Index  $W$  (Wirbel) versehen. Der Quotient  $\eta_W/\rho$  entspricht der (kinematischen) Wirbelzähigkeit  $\nu_W$ . Der Verhältniswert  $\nu_W/\nu$  ist unter (4.5) aufgeschrieben. Ermittelt wird die Wirbelzähigkeit experimentell. Bei den Experimenten benutzt man aber nicht  $c_M$ , die Mischgeschwindigkeit, und  $\Delta s$ , sondern eine charakteristische Geschwindigkeit des Makrostromes  $c_1$  und eine charakteristische Länge im Strömungsbild  $s_1$  (z. B. größte Geschwindigkeit eines turbulenten Großwirbels und der Radius auf dem diese Geschwindigkeit angetroffen wird). Die Wahrscheinlichkeit des Platzwechsels benennen wir in diesem Falle mit  $W_{P1}$ . Aus (4.5) erkennt man, daß das Zähigkeitsverhältnis der Reynoldszahl proportional ist, daß also die Wirbelzähigkeit mit der Reynoldszahl wächst und mit sinkender Reynoldszahl gemindert wird, bis bei einem Grenzwert der Reynoldszahl  $Re_{\min}$  die Turbulenz erlischt und  $\nu_W = \nu$  gilt. Dann ergibt sich aus (4.5) mit  $\nu_W/\nu = 1$  der Zusammenhang (4.6), und man schreibt statt (4.5) den Ausdruck (4.7). Für Wirbelfelder berechnet man die Reynoldszahl (4.8) und erhält an Stelle von (4.7) die Gleichung (4.9). Die Beziehung (4.7) wurde experimentell geprüft bei turbulenten Einzelwirbeln, bei Freistrahlen, bei Strahlengrenzen, bei Nachlaufströmungen und bei der Strömung hinter Sieben und in jedem Falle bestens bestätigt.

### Über freiturbulente Wirbelsysteme

Für Wirbelsysteme, die sich weit entfernt von begrenzenden Wänden bewegen, und die von einem homogenen Strom mit der Geschwindigkeit  $c_\infty$  weiter befördert werden, gestattet der gegenüber (2.5) etwas modifizierte Ansatz (5.1) auf Tafel 5 einige Schluß-

Tafel 5

$$\psi = k \cdot \exp \varepsilon \cdot \cos \gamma \cdot \cos \delta \tag{5.1}$$

$$\varepsilon = a_{3R} \cdot t + a_{1R}(x + y); \quad \gamma = a_{1i}x + a_{3t}t; \quad \delta = a_{1i}y \tag{5.2}$$

$$\Delta\psi = (a_{1R}^2 + a_{1i}^2) \cdot k \cdot \exp \varepsilon \{ \cos(\gamma + 2X) \cos \delta + \cos \gamma \cdot \cos(\delta + 2X) \} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p &\approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= c_\infty(a_{1R}^2 + a_{1i}^2) \cdot k \cdot \exp \varepsilon \cdot \{ \cos \gamma \cdot \cos(\delta + 2X) \\ &\quad - \cos(\gamma + 2X) \cdot \cos \delta \} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\text{Phasenverschiebung } X = \arctan \frac{a_{1i}}{a_{1R}} \tag{5.5}$$

$$\text{Geschwindigkeitsamplitude } c \sim \sqrt{a_{1R}^2 + a_{1i}^2} k \cdot \exp(\varepsilon) \tag{5.6}$$

Mit  $k \sim \frac{1}{a_{1R}^2 + a_{1i}^2}$  (5.7)

wird  $c \sim \frac{\exp(\varepsilon)}{\sqrt{a_{1R}^2 + a_{1i}^2}}$  (5.8)

für  $a_{1R}^2 \ll a_{1i}^2$

$$k \sim \frac{1}{a_{1i}^2} \tag{5.9}$$

und  $\dot{c} \sim \frac{\exp(\varepsilon)}{a_{1i}}$  (5.10)

folgerungen. Die Zeile (5.2) schreibt vor, daß die Dämpfungskoeffizienten in  $x$ - und  $y$ -Richtung gleich groß sind und daß die Wellenzahlen für  $x$  und  $y$  beide  $a_{1i}$  betragen sollen. Damit ergibt sich ein quadratisches Maschenmuster. Solche quadrat-maschigen Wirbelfelder werden zeitlich schwächer gedämpft als alle gleichflächigen Felder mit Rechteck-maschen, sie bleiben also am längsten erhalten. Der Faktor  $k$  in (5.1) soll von der Wellenzahl abhängen, es soll also  $k(a_{1i})$  gelten. Die Drehung  $\sim \Delta\psi$  berechnet man zu (5.3). Für die Phasenverschiebung  $X$  gilt (5.5). Der Druckgradient im Falle  $c_{x,y} \ll c_\infty$  ist unter (5.4) aufgeschrieben. Die Geschwindigkeitsamplitude  $c$  ergibt aus der Ableitung der Stromfunktion die Proportionalität (5.6). Mit der Abhängigkeit  $k(a_{1i})$  nach (5.7) werden sowohl die Amplituden der Drehung als auch die des Druckgradienten von der Dämpfung  $a_{1R}$  und von der Wellenzahl  $a_{1i}$  unabhängig, also sind dann die Amplituden von Drehung und Druckgradient für sämtliche Wirbelfelder innerhalb des ganzen Systems gleich groß geworden. Die Verteilung (5.7) entspricht dem zuerst von G. I. TAYLOR beschriebenen Energiedichte-Spektrum der homogen isotropen Turbulenz. Der von TAYLOR eingeführte Makromaßstab der Turbulenz  $\Lambda$  errechnet sich hier zu  $\Lambda = 1/|a_{1R}|$  [1]. Für denjenigen Teil des Spektrums mit großen Wellenzahlen  $a_{1i}$ , wo also  $a_{1i}^2 \gg a_{1R}^2$  gilt, und  $a_{1R}^2$  in (5.7) vernachlässigt werden darf, ergibt sich (5.9). Weiterhin soll eine hinsichtlich der Wirbelbewegung linearisierte Rayleigh-Gleichung (6.1) auf Tafel 6 be-

Tafel 6

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + c_\infty \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \nu_W \cdot \Delta \Delta\psi = 0 \quad (6.1)$$

für  $a_{1R} \rightarrow 0$ :

$$\Delta\psi \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} - a_{3i}\nu \cdot \tan \gamma \cdot 2a_{1i}^2 - c_\infty a_{1i}\nu \tan \gamma \cdot 2a_{1i}^2 - \nu_W \cdot 2a_{1i}^2 \Delta\psi = 0 \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\nu_W \cdot 2a_{1i}^2 \\ a_{3i} &= -a_{1i} \cdot c_\infty \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$$\varepsilon = -2a_{1i}^2 \cdot \nu \int \frac{\nu_W}{\nu} \cdot dt \quad (6.4)$$

$$= -\frac{4\pi}{\text{Re}_{\min}} a_{1i} \cdot c_0 \int \frac{c}{c_0} dt \quad (6.5)$$

$$c_{\text{Phase}} = -\frac{a_{3i}}{a_{1i}} = c_\infty \quad (6.6)$$

Spektrale Geschwindigkeitsverteilung

$$\begin{aligned} c_0(a_{1i}) &\text{ bei } t = 0 \\ c(a_{1i}) &\text{ bei } t > 0 \end{aligned}$$

aus (5.6) und (6.5)

$$\frac{c}{c_0} = \exp(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{4\pi}{\text{Re}_{\min}} \cdot a_{1i} \cdot c_0 \int \frac{c}{c_0} dt\right) \quad (6.7)$$

Lösung: 
$$c = \frac{c_0}{1 + \frac{4\pi}{\text{Re}_{\min}} \cdot a_{1i} \cdot c_0 \cdot t} \quad (6.8)$$

für großes  $t$  
$$c = \frac{\text{Re}_{\min}}{4\pi \cdot a_{1i} \cdot t} \quad (6.9)$$



nutzt werden. Das vernachlässigte nichtlineare Glied der Wirbelbewegung wird summarisch erfaßt, indem die molekulare Zähigkeit  $\nu$  von (1.7) in (6.1) durch die Wirbelzähigkeit  $\nu_W$  ersetzt worden ist. Man erhält durch Einsetzen von (5.1) in (6.1), mit  $a_{1R} = 0$ , die Gleichung (6.2), die weiterhin in zwei Gleichungen (6.3) zerfällt. Die erste Gleichung zeigt gemäß der Weiterführung (6.4), daß der zeitliche Dämpfungsfaktor  $\varepsilon$  aus einem Integral über die Wirbelzähigkeit  $\nu_W$  gewonnen wird. Denn die Wirbelzähigkeit  $\nu_W$  verkleinert sich mit dem zeitlichen Abbremsen der Wirbelbewegung. Aus (4.9) erhält man daraus für Wirbelfelder (6.5). Aus der zweiten Gleichung (6.3) ergibt sich durch das Umschreiben unter (6.6) eine Information über die Phasengeschwindigkeit  $c_{\text{Phase}}$  der Wirbelfelder.

Nun soll die Größe der Geschwindigkeitsamplitude  $c$  abhängig von der Zeit  $t$  berechnet werden. Wenn zur Zeit  $t = 0$  eine spektrale Verteilung  $c_0$  abhängig von  $a_{1i}$  bekannt ist, dann läßt sich für die Zeit  $t$  aus (5.6) und (6.5) die Gleichung (6.7) schreiben. Diese zuerst von J. KRAFT [2] gefundene Beziehung hat die Lösung (6.8). Das ist eine sehr aussagekräftige Gleichung, sie gilt für jedes beliebige strömungsmechanisch realisierbare Anfangsspektrum  $c_0(a_{1i})$  in einem frei turbulenten Wirbelsystem. Aus dieser Gleichung ist weiterhin folgender Schluß zu ziehen: Mit Wachsen der Zeit  $t$  wird der zweite Summand im Nenner sehr viel größer werden als der erste, den man dann vernachlässigen darf. Dann geht (6.8) in (6.9) über. Aus dieser Gleichung ist die Anfangsverteilung  $c_0$  herausgefallen: Für jedes Spektrum wird nach genügend langer Zeit die Verteilung  $c \sim 1/a_{1i}$  erreicht. Es geht jedes Spektrum im Laufe der Zeit in das der homogen isotropen Turbulenz über. Das Spektrum der homogen isotropen Turbulenz wird im allgemeinen Fall in einer späten Phase des Zeitablaufes erreicht. Bezeichnet man das Spektrum als homogen isotrop, wenn der zweite Summand im Nenner von (6.8) hundertmal größer als der erste geworden ist, dann wird hierzu eine Zeit nötig, die hundertmal größer als die Halbwertzeit ist. Es ist mit (6.8) auch möglich, aus einer Messung  $c(a_{1i})$  zur Zeit  $t > 0$  die Anfangsverteilung  $c_0$  zur Zeit  $t = 0$  auszurechnen. Allerdings steigen mit der Zeit, und dem damit verbundenen Kleinerwerden von  $c/c_0$ , die Ansprüche an die Meßgenauigkeit von  $c$  außerordentlich an. Aus (6.8) erhält man durch Differenzieren die Gleichung (7.1) auf Tafel 7. Der Nenner entspricht nach (6.8) gerade  $(c_0/c)^2$ , also läßt

Tafel 7

$$dc = \frac{dc_0}{\left(1 + \frac{4\pi}{\text{Re}_{\min}} \cdot c_0 \cdot a_{1i} \cdot t\right)^2} \quad (7.1)$$

$$dc = \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 \cdot dc_0 \quad (7.2)$$

$$\frac{dc_0}{c_0} = \frac{c_0}{c} \cdot \frac{dc}{c} \quad (7.3)$$

sich (7.2) schreiben, und dieses kann man entsprechend (7.3) umformen. Aus dem Spektrum der Turbulenz für  $c_0/c = 10^2$  ließe sich das Anfangsspektrum mit einer Genauigkeit von  $dc_0/c_0 = 10^{-2}$  nur dann errechnen, wenn die Meßgenauigkeit auf  $dc/c = 10^{-4}$  gesteigert würde. Diese Meßgenauigkeit wird kaum zu erreichen sein, deshalb wird das Rückrechnen aus einem stark gealterten Spektrum, das sich schon der homogen isotropen Turbulenz annähert, praktisch nicht möglich sein. Während den Integralen der Eulergleichung auf der Zeitskala keine Grenzen gesetzt sind, geschieht das bei den Integralen der die Reibung berücksichtigenden Navier-Stokes Gleichung doch, verursacht durch den aus statistischen Mitteln entstandenen Reibungskoeffizienten.

### Literaturverzeichnis

- [1] ALBRING, W.: Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen. Berlin 1981.
- [2] KRAFT, J.: Beschreibung turbulenter Strömungen durch mathematisch definierte Modelle. Dissertation TU Dresden 1969.
- [3] STREHLE, E.: Laminare ebene Wirbelfelder. Maschinenbautechnik **23** (1971).
- [4] DETSCH, F.; DETSCH, F. E.: Über die Schallerzeugung in Wirbelfeldern. Dissertation TU Dresden 1976.
- [5] SCHINDLER, G.: Wirbelströmungen in der Reibungsschicht eines ebenen Kanals. Dissertation (B) TU Dresden 1982.

Bei der Redaktion eingegangen am 8. März 1985.

Anschr. d. Verf.: Prof. Dr. W. ALBRING  
Technische Universität Dresden  
Sektion Energieumwandlung  
DDR-8027 Dresden, Mommsenstr. 13